UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “La Sapienza”
FACOLTÀ DI INGEGNERIA - LABORATORIO DI FISICA

Latella Leonardo matr.1125996

STUDIO DEL LANCIO DI 3 DADI

Il calcolo delle probabilità studia gli eventi casuali probabili, cioè quegli eventi che possono o non possono verificarsi e che dipendono unicamente dal caso. Tale studio permette di assegnare agli eventi casuali (o aleatori) un valore numerico al fine di poter confrontare oggettivamente tali eventi e decidere quale tra essi ha maggiore probabilità di verificarsi.
Se P(E)=1, ovvero la probabilità di un evento è pari ad 1 l’evento è certo.

Si possono dare diverse definizioni di probabilità.

Definizione di probabilità secondo la concezione classica

La probabilità P(E) di un evento E è il rapporto fra il numero F dei casi favorevoli (al verificarsi di E) e il numero N dei casi possibili, giudicati egualmente possibili:

$$P(E) = \frac{F}{N} \quad \text{con} \quad 0 \le P(E) \le 1$$

se **F=0**, cioè se non esistono casi favorevoli al verificarsi dell’evento, questo è detto **impossibile** e la sua probabilità è nulla (P(E)=0). Se **F=N**, cioè se tutti i casi sono favorevoli al verificarsi dell’evento, questo è detto **certo** e la sua probabilità è massima (P(E)=1).
Uno dei punti deboli della concezione classica è la condizione, pressoché impossibile da verificare, che tutti i casi in cui può manifestarsi il fenomeno siano egualmente possibili.
Tale definizione, inoltre, si può applicare quando l’insieme dei casi è un insieme finito.

Definizione di probabilità secondo la concezione frequentista

La concezione frequentista è basata sulla definizione di frequenza relativa di un evento.
Si definisce frequenza relativa di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero v delle prove nelle quali l’evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:

$$f = \frac{v}{n} \quad \text{con} \quad 0 \le f \le 1$$

Quindi la probabilità di un evento è il limite della frequenza dei successi, cioè del verificarsi dell'evento, quando il numero delle prove tende all'infinito.

Se **f = 0** l’evento non si è mai verificato in quelle n prove;
se **f = 1** (v = n) l’evento si è sempre verificato in quelle n prove.

La frequenza dipende dal numero n delle prove fatte. Per uno stesso n la frequenza può variare al variare del gruppo delle prove infatti se si lancia 100 volte una moneta e si presenta testa 54 volte, effettuando altri 100 lanci si può presentare 48 volte.
Secondo la legge empirica del caso, in una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.

Generalmente non si può dire quante prove siano necessarie; il numero delle prove dipende dal fenomeno in esame.
Quindi se i casi possibili sono n e l'insieme dei casi favorevoli sono n_A, per la teoria classica la probabilità che accada l'evento A sarà

$$p_A = \frac{n_A}{n}$$

mentre per la teoria frequentista essa sarà

$$p_A = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

La probabilità di ottenere un 6 lanciando un singolo dado è:

casi favorevoli = 1 (ossia la faccia che mostra il numero 6);
casi possibili = 6 (ossia la faccia che mostra il numero 6 e le altre 5 facce).

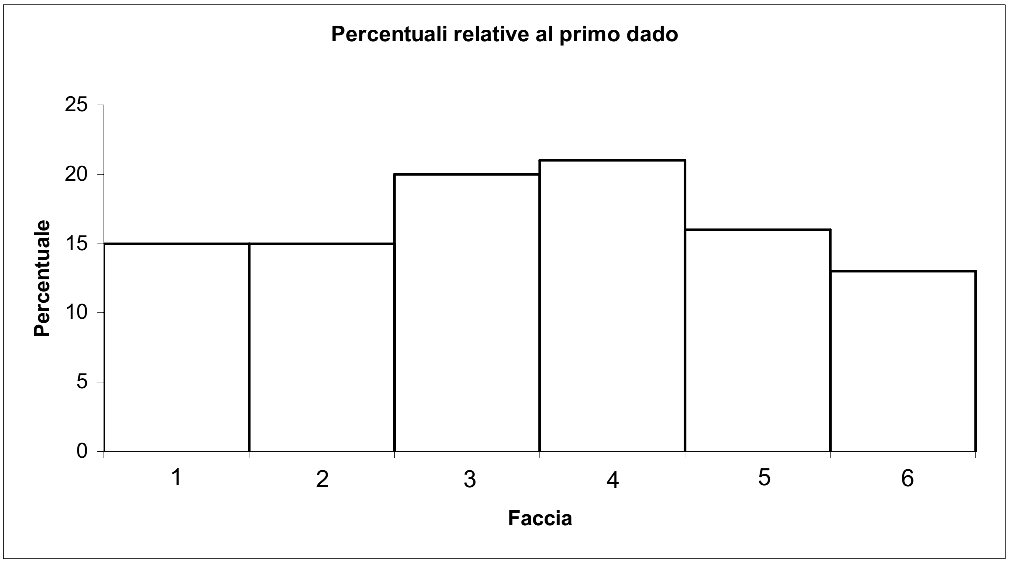
dunque, la probabilità di ottenere un 6 è 1/6 $\simeq$ 0,16 (*) e la somma delle probabilità delle sei facce, che possiamo considerare uguale, è $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$.
Ovviamente, una probabilità non è una certezza. Infatti, può benissimo accadere che su sei lanci non si presenti mai la faccia con il numero 6; tuttavia, aumentando il numero di lanci, si può constatare che effettivamente la frequenza con cui si presenta il numero 6 è molto vicina ad 1/6.
La probabilità di ottenere invece due 6 lanciando due dadi corrisponde a:

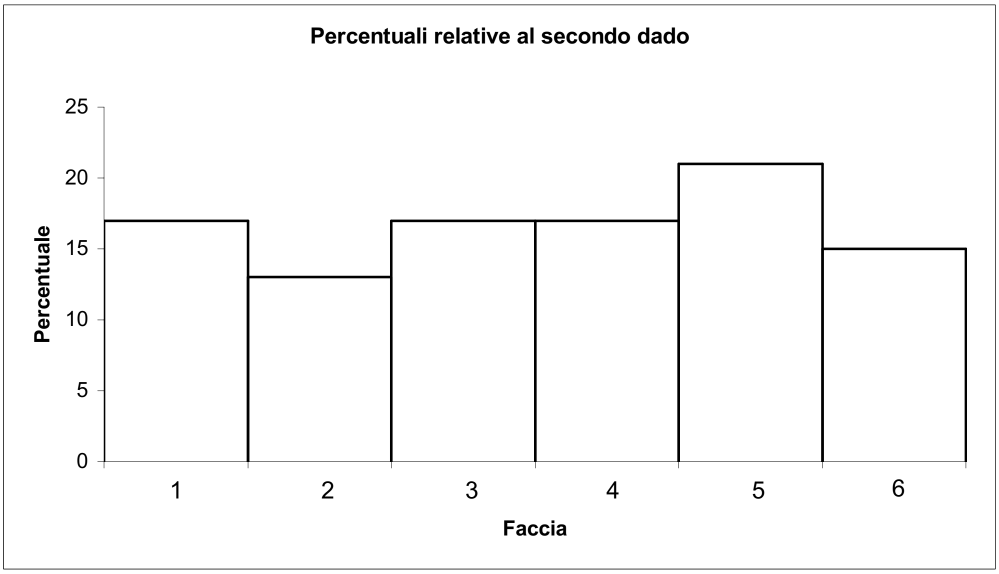
casi favorevoli = 1 (l'unica combinazione in cui si presentano due facce che mostrano il numero 6);
casi possibili = 36 (ossia tutte le combinazioni di due dadi che si possono presentare, comprese quelle con il 6); quindi, la probabilità di ottenere un doppio 6 è 1/36.
In particolare la probabilità cercata si può anche calcolare moltiplicando tra loro le singole probabilità di ottenere un 6 quindi $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Più in generale, questa regola vale anche per più dadi.
Così, la probabilità di ottenere tre 6 lanciando tre dadi è $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
Gli eventi per i quali vogliamo calcolare la probabilità del loro verificarsi, devono essere indipendenti: quando lanciamo due dadi, infatti, non ha importanza che il lancio sia contemporaneo.
Volendo calcolare la probabilità che, lanciando tre dadi, capitino due facce uguali, essa corrisponde a 5/12 $\simeq$ 0,416 (*) e la probabilità che tutte e tre le facce siano uguali corrisponde a 1/36 $\simeq$ 0,027 (*).

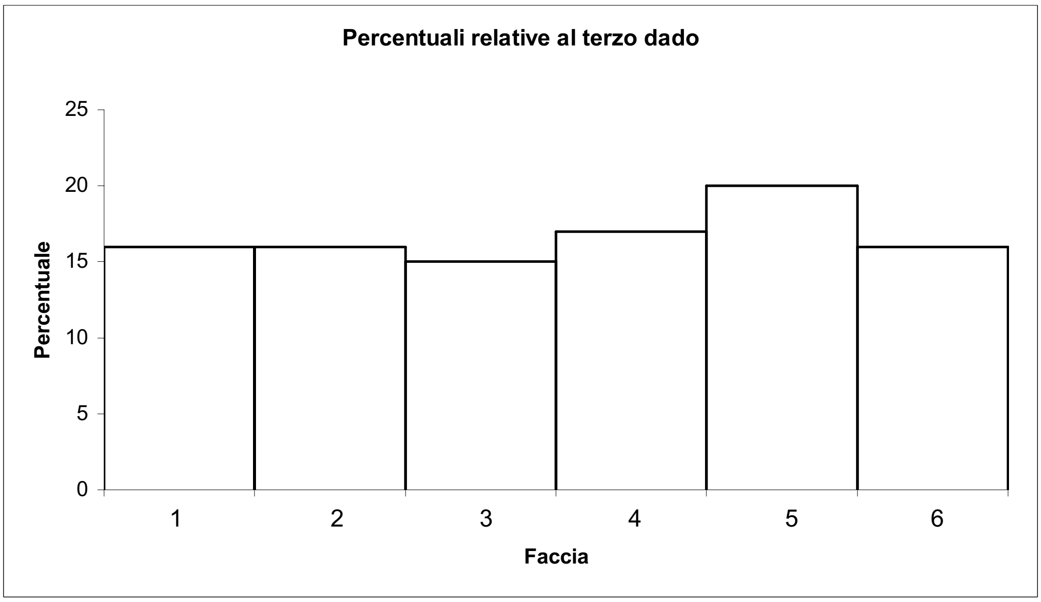
Lanciamo contemporaneamente tre dadi per 100 volte. I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella

Lancio n°	Dado1	Dado2	Dado3	Somma
1	4	1	5	10
2	1	1	1	3
3	1	6	6	13
4	2	3	6	11
5	3	5	4	12
6	6	6	5	17
7	3	5	5	13
8	3	3	3	9
9	2	1	5	8
10	2	6	2	10
11	5	4	2	11
12	1	3	3	7
13	5	5	1	11
14	4	4	4	12
15	3	2	3	8
16	3	6	4	13
17	4	6	2	12
18	6	5	5	16
19	6	5	4	15
20	3	3	3	9
21	5	1	3	9
22	5	6	3	14
23	3	5	6	14
24	1	4	4	9
25	6	5	4	15
26	3	4	2	9
27	5	3	1	9
28	2	5	1	8
29	4	4	1	9
30	3	2	5	10
31	4	5	4	13
32	3	2	5	10
33	4	4	5	13
34	3	4	6	13
35	2	3	1	6
36	6	1	4	11
37	3	3	3	9
38	5	1	1	7
39	4	5	4	13
40	4	5	2	11
41	3	1	3	7
42	3	5	5	13
43	6	4	2	12
44	4	4	4	12
45	3	5	1	9
46	6	3	2	11
47	6	3	5	14
48	2	3	1	6
49	4	3	5	12
50	4	5	6	15
51	3	4	1	8
2	1	6	4	11
53	2	5	5	12
54	1	4	6	11
55	4	6	3	13
56	1	1	6	8
57	5	6	2	13
58	1	6	1	8
59	6	4	6	16
60	4	4	6	14
61	1	3	3	7
62	1	1	6	8
63	2	1	5	8
64	5	2	6	13
65	3	2	5	10
66	4	4	5	13
67	1	1	4	6
68	5	2	3	10
69	1	1	2	4
70	6	5	1	12
71	4	3	3	10
72	1	3	6	10
73	2	6	5	13
74	3	5	3	11
75	5	6	4	15
76	2	4	1	7
77	5	6	1	12
78	6	2	1	9
79	3	1	6	10
80	4	2	5	11
81	5	5	4	14
82	2	3	2	7
83	5	4	1	10
84	1	2	3	6
85	3	3	3	9
86	2	6	2	10
87	6	5	5	16
88	5	5	2	12
89	5	6	5	16
90	2	5	6	13
91	4	1	2	7
92	4	4	4	12
93	1	3	4	8
94	4	1	2	7
95	6	3	4	13
96	4	1	2	7
97	4	2	3	9
98	2	5	6	13
99	5	1	2	8
100	2	4	5	11
$\bar{x}$ (*)	3,47	3,63	3,54	

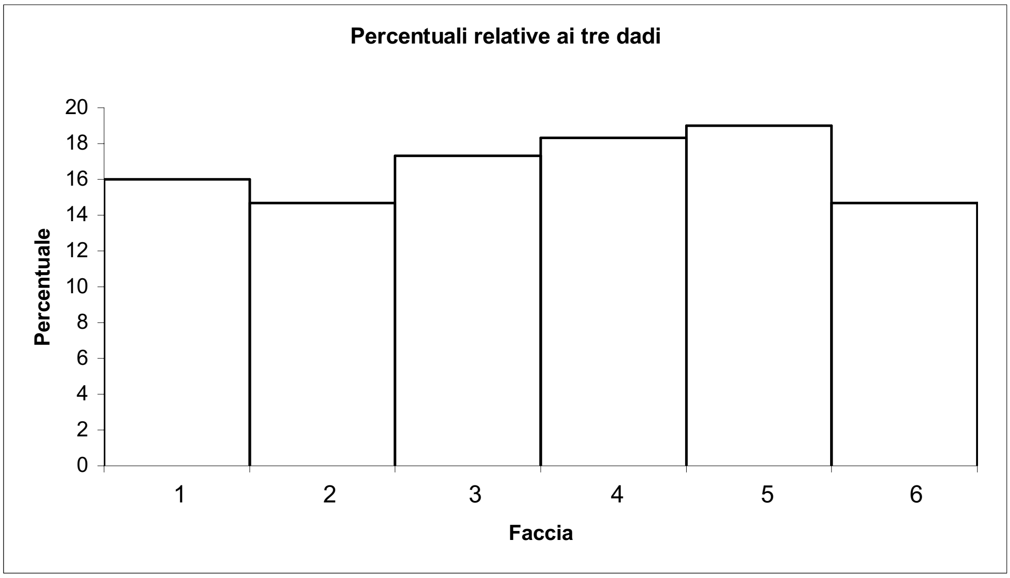
La percentuale di lanci in cui si sono avuti due punteggi uguali (escludendo i casi in cui si presentano tre facce uguali) è il 34% (*), invece quella dei lanci in cui tutti e tre i punteggi erano uguali è l’8% (*); questi due valori differiscono da quelli precedentemente calcolati a rappresentare che il lancio di un dado è indipendente da quello degli altri dadi e dal successivo lancio dello stesso.







Come si può notare le percentuali (che si presenti un valore per un dado) oscillano intorno al valore 16,7%, ovvero quello calcolato teoricamente tramite il calcolo delle probabilità (*). I due valori non coincidono poiché il numero di lanci effettuato è finito.



Anche considerando le percentuali relative ai tre dadi il valore medio oscilla intorno al valore 16,5.

Per una distribuzione discreta di probabilità il valor medio o valore atteso, che rappresenta un numero verso il quale i valori ottenuti tendono all'infinito, è dato da

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) \qquad \text{quindi} \qquad E(x) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

valore molto simile ai valori medi precedentemente calcolati (*).

La varianza σ^2 invece è la differenza tra la media dei quadrati e il quadrato della media campionaria:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

che nel caso dei 100 lanci è $\sigma^2 = 2,73$.

La deviazione standard è $\sigma = 1,65$

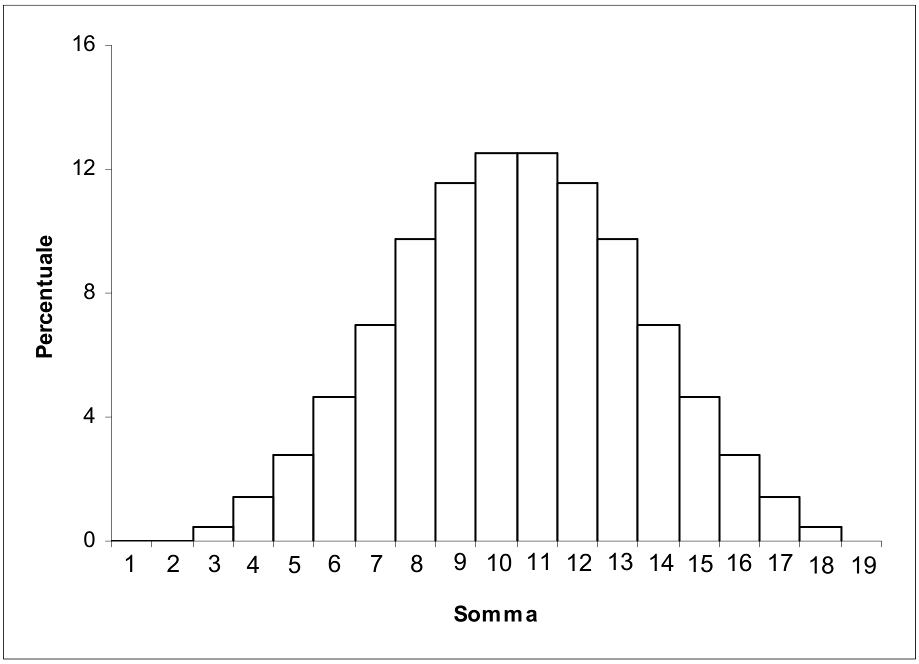
La deviazione standard della media invece è $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \simeq 0,095$

Si consideri la somma dei valori ottenuti lanciando i tre dadi. La tabella seguente riporta nella seconda colonna le terne di valori, la cui somma è costante, ottenute lanciando tre dadi. Come si può vedere dalla terza colonna per ognuna di queste terne i valori si possono presentare in diverse combinazioni ad esempio la terna (1,1,2) si può presentare secondo tre combinazioni: (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1).

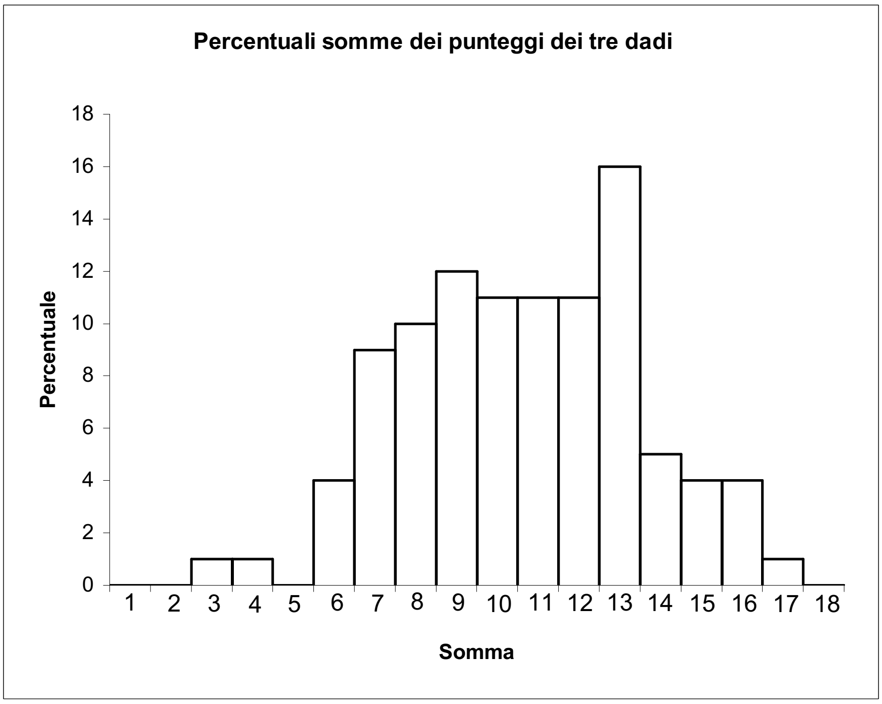
Somme	Terne	Numero di combinazioni	N_{tot}	Probabilità (%)
3	(1,1,1)	1	1	0,46
4	(1,1,2)	3	3	1,39
5	(1,1,3) (1,2,2)	3 3	6	2,78
6	(1,1,4) (1,2,3) (2,2,2)	3 6 1	10	4,63
7	(1,1,5) (1,2,4) (1,3,3) (2,2,3)	3 6 3 3	15	6,94
8	(1,1,6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3)	3 6 6 3 3	21	9,72
9	(1,2,6) (1,3,5) (1,4,4) (2,3,4) (2,5,2) (3,3,3)	6 6 3 6 3 1	25	11,57
10	(1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2,6,2) (3,3,4)	6 6 6 3 3 3	27	12,50
11	(6,4,1) (6,3,2) (5,4,2) (5,3,3) (5,1,5) (4,4,3)	6 6 6 3 3 3	27	12,50
12	(6,5,1) (6,4,2) (6,3,3) (5,4,3) (5,2,5) (4,4,4)	6 6 3 6 3 1	25	11,57
13	(6,6,1) (6,5,2) (6,4,3) (5,5,3) (5,4,4)	3 6 6 3 3	21	9,72
14	(6,6,2) (6,5,3) (6,4,4) (5,5,4)	3 6 3 3	15	6,94
15	(6,6,3) (6,5,4) (5,5,5)	3 6 1	10	4,63
16	(6,6,4) (6,5,5)	3 3	6	2,78
17	(6,6,5)	3	3	1,39
18	(6,6,6)	1	1	0,46
		Somma	216	100

Come si può notare dalla tabella sovrastante le somme più probabili sono 10 e 11.

Istogramma teorico associato alla distribuzione:



L’istogramma ottenuto dai dati sperimentali è il seguente:



Somma	%
1	0
2	0
3	1
4	1
5	0
6	4
7	9
8	10
9	12
10	11
11	11
12	11
13	16
14	5
15	4
16	4
17	1
18	0

Questo grafico è diverso da quello teorizzato prima per il motivo che i lanci effettuati sono finiti.