Leonardo Latella

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Consideriamo un evento A relativo a un determinato esperimento. La probabilità che, su n prove indipendenti condotte tutte nelle medesime condizioni, si abbiano k successi, con $k \le n$ è data dalla formula (*)

$$p_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

dove $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale, p indica la probabilità del singolo evento A, costante in tutte le prove, e q la probabilità dell'evento non(A), quindi $q = 1 - p$.
La probabilità che non si verifichi alcun successo è q^n, e quindi la probabilità che si verifichi almeno un successo è $1 - q^n$. Ma quanto vale $\binom{n}{k}$?

Dato un insieme A si definiscono permutazioni di n elementi (diversi tra di loro) i raggruppamenti formati dagli n elementi presi in un ordine qualsiasi.

$$P_n = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 = n!$$

Dato un insieme A di n elementi si definiscono combinazioni semplici degli n elementi di classe $k \le n$, i raggruppamenti di k elementi scelti tra gli n dell’insieme A, tali che ogni raggruppamento differisca dagli altri per la natura degli elementi, senza considerare l’ordine degli elementi.

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)...\left[n-(k-1)\right]}{k!} = \binom{n}{k}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)! = (n-k)\left[(n-k)-1\right]...3 \cdot 2 \cdot 1$ otteniamo (*)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Come già detto in un evento relativo ad un esperimento la probabilità che, su n prove indipendenti condotte tutte nelle medesime condizioni, si abbiano k successi è

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

dato che $(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + ... + p^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ e $p+q=1$

e che $\sum_{k=0}^{n} P_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$

si ha $\sum_{k=0}^{n} P_{n,p}(k) = 1$ (*)

Valore medio e deviazione standard della distribuzione binomiale

Il valor medio della variabile casuale binomiale k su n prove è, per la definizione,

$$\overline{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(k)$$

Il secondo membro della formula precedente si sviluppa in

$$\binom{n}{1} pq^{n-1} + 2\binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + 3\binom{n}{3} p^3 q^{n-3} + ... + n\binom{n}{n} p^n$$

Raccogliendo np da tutti i monomi

$$np\left[\frac{1}{n}\binom{n}{1} q^{n-1} + \frac{2}{n}\binom{n}{2} pq^{n-2} + \frac{3}{n}\binom{n}{3} q^{n-3} + ... + \binom{n-1}{n-1} p^{n-1}\right]$$ dove $\binom{n-1}{n-1} = 1$

Si può verificare che la somma tra parentesi quadre è la potenza (n-1)-esima di $p+q$, cioè 1. Quindi il valor medio di una variabile casuale bernoulliana k su n prove è

$$\overline{k} = np$$

Il valor medio di k su $n-1$ prove è

$$\bar{k}=\sum_{k=0}^{n-1} k\cdot P(k)=\binom{n-1}{1}pq^{n-2}+2\binom{n-1}{2}p^2q^{n-3}+3\binom{n-1}{3}p^3q^{n-4}+\ldots+(n-1)\binom{n-1}{n-1}p^{n-1}$$

dove p.es.

$$\binom{n-1}{2}=\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!2!}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\binom{n-1}{3}=\frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!3!}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2}$$

$$\binom{n-1}{1}=(n-1)$$

quindi

$$\bar{k}=(n-1)pq^{n-2}+2\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2q^{n-3}+3\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2}p^3q^{n-4}+\ldots+(n-1)p^{n-1}$$

semplificando

$$\bar{k}=(n-1)pq^{n-2}+(n-1)(n-2)p^2q^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}p^3q^{n-4}+\ldots+(n-1)p^{n-1}$$

$$\bar{k}=(n-1)p\left[q^{n-2}+(n-2)pq^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}p^2q^{n-4}+\ldots+p^{n-2}\right]=(n-1)p$$

dove $(q+p)^{n-2}=q^{n-2}+\binom{n-2}{1}pq^{n-3}+\binom{n-2}{2}p^2q^{n-4}+\ldots+p^{n-2}=1$ essendo $q+p=1$

$$\binom{n-2}{1}=\frac{(n-2)!}{(n-3)!}=\frac{(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=(n-2)$$

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)=\frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!2}=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Il valor medio dei quadrati su n prove è

$$\overline{k^2}=\sum_{k=0}^{n} k^2P(k)=\binom{n}{1}pq^{n-1}+2^2\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+3^2\binom{n}{3}p^3q^{n-3}+\ldots+n^2\binom{n}{n}p^n$$

sviluppando i coefficienti binomiali usando (*) si ottiene

$$\overline{k^2} = npq^{n-1} + 2^2 \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2} + 3^2 \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} p^3 q^{n-3} + \ldots + n^2 p^n$$

Semplificando si ottiene

$$\overline{k^2} = npq^{n-1} + 2n(n-1) p^2 q^{n-2} + 3n \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^3 q^{n-3} + \ldots + n^2 p^n$$

raccogliendo np si ottiene

$$\overline{k^2} = np \left[q^{n-1} + 2 \binom{n-1}{1} pq^{n-2} + 3 \binom{n-1}{2} p^2 q^{n-3} + \ldots + np^{n-1} \right]$$

La somma tra parentesi quadre può essere scomposta in due somme:

$$q^{n-1} + \binom{n-1}{1} pq^{n-2} + \binom{n-1}{2} p^2 q^{n-3} + \ldots \quad \text{e} \quad \binom{n-1}{1} pq^{n-2} + 2 \binom{n-1}{2} p^2 q^{n-3} + \ldots$$

La prima è la potenza $(n-1)$-esima del binomio $p+q$ che vale 1. La seconda vale $(n-1)p$.

In definitiva il valor medio dei quadrati vale

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 P(k) = np\left[1 + (n-1)p\right] = np + n^2 p^2 - np^2$$

e la varianza della distribuzione binomiale risulta

$$\sigma^2 = \overline{k^2} - \overline{k}^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Per la deviazione standard si ottiene

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Esempio:

Un allegro tiratore colpisce un bersaglio con probabilità 0,2. Quale è la probabilità che su 8 tiri colpisca due volte il bersaglio? E che lo colpisca almeno due volte?

Dalla traccia del problema si ricava che $p = 0,2$ e che $q = 1 - p = 0,8$. p rappresenta la probabilità di "successo", q quella di "insuccesso". Usando la (*) possiamo rispondere alla prima domanda infatti

$$p_8(2) = \binom{8}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^6 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^6 \simeq 0,2936$$

Per quanto riguarda il secondo quesito calcoliamo la probabilità che il tiratore non colpisca il bersaglio

$$p_8(0) = \binom{8}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^8 \simeq 0,1678$$

e quella che lo colpisca una volta

$$p_8(1) = \binom{8}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^7 = 8 \cdot 0,2 \cdot 0,8^7 \simeq 0,3355$$

per la (*) possiamo ricavare la probabilità che il tiratore colpisca almeno due volte il bersaglio

$$1 - (0,1678 + 0,3355) = 0,4967$$